Title	ディリクレ形式の摂動と基本解の安定性について (確率論シンポジウム)
Author(s)	和田, 正樹
Citation	数理解析研究所講究録 (2013), 1855: 147-153
Issue Date	2013-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/195218
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1855 巻 2013 年 147-153

ディリクレ形式の摂動と基本解の安定性について

東北大学大学院理学研究科数学専攻 D2　和田正樹
Masaki Wada
Mathematical Institute, Tohoku University

2012 年 12 月 20 日発表

1　記号と諸概念

1.1　基本概念

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の飛躍型ディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ を

$$\mathscr{E}(u,v)=\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}(u(y)-u(x))(v(y)-v(x))J(x,y)dxdy, \qquad \mathscr{F}=\overline{C_c(\mathbb{R}^d)}^{\mathscr{E}_1^{1/2}} \tag{1}$$

により定める。ここで、$\mathscr{E}_1$ は $\mathscr{E}_1(u,u)=\mathscr{E}(u,u)+\int_{\mathbb{R}^d}u^2(x)dx$ により定められるノルムであり、$J(x,y)$ は

$$\frac{\kappa_1}{|x-y|^d\phi(|x-y|)}\leq J(x,y)=J(y,x)\leq\frac{\kappa_2}{|x-y|^d\phi(|x-y|)} \qquad (0<\kappa_1\leq\kappa_2) \tag{2}$$

$$\phi(r)=r^{\alpha}\exp(m(r-1)\vee 0) \qquad (0<\alpha<2,\ m\geq 0) \tag{3}$$

を満たす関数とする。このとき、飛躍型マルコフ過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ がディリクレ形式 (1) から生成される。もし (3) で $m=0$ とならば、$\{X_t\}_{t\geq 0}$ は α-安定型過程と云い、$m\neq 0$ となるときは相対論的 α-安定型過程であるという。一般にマルコフ過程を解析する上で、推移確率密度関数 $p(t,x,y)$ は重要な役割を担っており、これはディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ から生成される半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ の積分核に等しい。すなわち

$$P_tf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}p(t,x,y)f(y)dy=\mathbb{E}_x[f(X_t)] \tag{4}$$

が成立する。また、$(\mathscr{E},\mathscr{F})$ に対応する生成作用素を $\mathscr{L}$ としたとき、$p(t,x,y)$ は方程式 $\partial u/\partial t=\mathscr{L}u$ の基本解に等しいため、$p(t,x,y)$ は熱核とも呼ばれる。

1.2　先行結果

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ が α-安定型過程・相対論的 α-安定型過程のいずれの場合でも、熱核 $p(t,x,y)$ が全ての時刻 t と $x,y\in\mathbb{R}^d$ で上下からの評価をもつことが、Z.-Q. Chen、P. Kim 及び熊谷隆の 3 氏により証明されている。

命題 1. *(Chen, 熊谷 2003)*
$\{X_t\}_{t\geq 0}$ が α-安定型過程のとき、熱核 $p(t,x,y)$ は正定数 C_i を用いて以下のように評価される。

$$C_1\left(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right)\leq p(t,x,y)\leq C_2\left(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right)$$

命題 2. *(Chen, Kim, 熊谷 2011)*
$\{X_t\}_{t\geq 0}$ が相対論的 α-安定型過程のとき、熱核 $p(t,x,y)$ は正定数 C_i を用いて以下のように評価される。

(1) $0<t\leq 1$ かつ $0<|x-y|\leq 1$ ならば

$$C_1(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}})\leq p(t,x,y)\leq C_2(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}})$$

(2) $1\vee|x-y|\leq t$ ならば

$$C_3t^{-\frac{d}{2}}\exp(-\frac{C_4|x-y|^2}{t})\leq p(t,x,y)\leq C_5t^{-\frac{d}{2}}\exp(-\frac{C_6|x-y|^2}{t})$$

(3) $1\leq t\leq|x-y|$ ならば

$$C_7t^{-\frac{d}{2}}\exp(-C_8|x-y|)\leq p(t,x,y)\leq C_9t^{-\frac{d}{2}}\exp(-C_{10}|x-y|)$$

(4) $0<t\leq 1$ かつ $1\leq|x-y|$ ならば

$$C_{11}t\exp(-C_{12}|x-y|)\leq p(t,x,y)\leq C_{13}t\exp(-C_{14}|x-y|)$$

以下、マルコフ過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 及びディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ は過渡的であるとする。この場合は、$p(t,x,y)$ の評価式からグリーン核 $G(x,y)=\int_0^\infty p(t,x,y)dt$ が以下のように評価されることがわかる。

系 3. *(1)* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が α-安定型過程のときは、正定数 C_i により以下の評価式が成立する。

$$\frac{C_1}{|x-y|^{d-\alpha}}\leq G(x,y)\leq\frac{C_2}{|x-y|^{d-\alpha}} \tag{5}$$

(2) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が相対論的 α-安定型過程のときは、正定数 C_i により以下の評価式が成立する。

$$C_1(\frac{1}{|x-y|^{d-\alpha}}\vee\frac{1}{|x-y|^{d-2}})\leq G(x,y)\leq C_2(\frac{1}{|x-y|^{d-\alpha}}\vee\frac{1}{|x-y|^{d-2}}) \tag{6}$$

1.3 問題設定

前項の先行結果で注目すべきことは、α-安定型過程・相対論的 α-安定型過程いずれの場合も熱核 $p(t,x,y)$ やグリーン核 $G(x,y)$ における上下からの評価式は、正定数の選び方を除いて全く同じ形をしているということである。このことを踏まえて、過渡的なディリクレ形式 (1) に摂動を与えた状況を考える。その定式化に用いるのが、$\mathbb{R}^d$ 上のグリーン緊密な測度 μ である。

定義 4. (1) 正値で滑らかなラドン測度 μ が加藤クラスに属すとは (以下 $\mu\in\mathscr{K}$ と表記), 任意のコンパクト集合 K_1 と K_2 に対して以下が成立することである。

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K_1}\mu(K_2\cap\{y\,:\,G(x,y)>n\})=0,$$
$$\lim_{\beta\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}G_\beta(x,y)\mu(dy)=0,$$

但し、ここで $G_\beta(x,y)=\int_0^\infty e^{-\beta t}p(t,x,y)dt$ である。

(2) 測度 $\mu \in \mathscr{K}$ がグリーン緊密 (以下 $\mu \in \mathscr{K}_\infty$ と表記) であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、適切なコンパクト集合 K_ε により

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{K_\varepsilon^c} G(x,y)\mu(dy) \le \varepsilon$$

が成立し、更に適切な正数 δ_ε を選べば、$\mu(B) < \delta_\varepsilon$ かつ $B \subset K_\varepsilon$ となるような任意の集合 B に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_B G(x,y)\mu(dy) \le \varepsilon.$$

が成立することである。

元のディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ と測度 $\mu \in \mathscr{K}_\infty$ を用いて

$$\mathscr{E}^\mu(u,u) = \mathscr{E}(u,u) - \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu \tag{7}$$

とシュレディンガー形式を定める。このとき、ディリクレ形式 $\mathscr{E}$ に生成作用素 $\mathscr{L}$ が存在するのと同様、シュレディンガー形式 $\mathscr{E}^\mu$ にも生成作用素 $\mathscr{L}^\mu$ が存在する。更に、この作用素を用いた方程式 $\partial u/\partial t = \mathscr{L}^\mu u$ にも基本解 $p^\mu(t,x,y)$ が存在することが知られている [1, 2]。$\{P_t^\mu\}_{t\ge0}$ をシュレディンガー形式 $\mathscr{E}^\mu$ から生成される半群とすると、(4) に対応する等式は

$$P_t^\mu f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(t,x,y)f(y)dy = \mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)f(X_t)] \tag{8}$$

である。ただし、ここで A_t^μ は

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)h(x)\mu(dx) = \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\mathbb{E}_{hdx}\Big[\int_0^t f(X_s)dA_s^\mu\Big] \tag{9}$$

を満たす、μ とルヴューズ対応する一意的な正値連続な加法的汎関数である。ここで注意すべきは、式 (4) と (8) を比較すると、後者は A_t^μ による増大が含まれているので、$p^\mu(t,x,y)$ はもはや確率密度ではないということである。しかしながら、粒子が運動するに従って $\exp(A_t^\mu)$ の割合で粒子が分裂していく状況ないしは粒子の質量が増加していく状況を考えれば、$p^\mu(t,x,y)$ は初期値 x に粒子があったとき、時刻 t で y に存在している粒子の量の密度を表していると捉えられる。

本論では $p^\mu(t,x,y)$ が正定数の選び方を除いて $p(t,x,y)$ と同じ上下評価をもつための必要十分条件について定式化を行った。このような現象が起こるとき、基本解は摂動 μ に対して安定であるという。直感的には、μ があまりにも大きな測度になると、粒子の総量が急激に増大していくため、粒子の総量が時間一定であるマルコフ過程 $\{X_t\}_{t\ge0}$ とは全く異なるものとなり、安定性が成立しなくなることが予想される。この小ささは、元のマルコフ過程 $\{X_t\}_{t\ge0}$ に対応するディリクレ形式 $\mathscr{E}$ と比較して次のように定式化することが可能である。

定理 5. ディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ が *(1) - (3)* で与えられており、測度 μ はグリーン緊密であるとする。このとき、基本解の安定性が成立するための必要十分条件は、以下の式が成り立つことである。

$$\inf\{\mathscr{E}(u,u) \mid u\in\mathscr{F}, \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\} > 1 \tag{10}$$

驚くべきことに、これは同じ問題をリーマン多様体上のブラウン運動の場合に扱った竹田雅好氏の結果 [10] と同じものである。

2 定理 5 の証明

2.1 必要条件であることの証明

定理 5 の証明を行う前に、もう 1 つ測度のクラスを定義する。

定義 6. 測度 $\mu \in \mathscr{K}$ がクラス $\mathscr{S}_\infty$ に属すとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、適切なコンパクト集合 K_ε により

$$\sup_{x,z\in\mathbb{R}^d} \int_{K_\varepsilon^c} \frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)} \mu(dy) \le \varepsilon$$

が成立し、更に適切な正数 δ_ε を選べば $\mu(B) < \delta_\varepsilon$ かつ $B \subset K_\varepsilon$ となるような任意の集合 B に対して

$$\sup_{x,z\in\mathbb{R}^d} \int_{B} \frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)} \mu(dy) \le \varepsilon.$$

が成立することである。

このとき、一般のマルコフ過程では $\mathscr{S}_\infty \subset \mathscr{K}_\infty$ という包含関係が成立することが [3] にて示されている。しかしながら、α-安定型過程ないし、相対論的 α-安定型過程に対しては逆の包含関係 $\mathscr{K}_\infty \subset \mathscr{S}_\infty$ も云える。一般には次の命題が成立する。

命題 7. グリーン核 $G(x,y)$ が、

$$C_1 \le g(r)/g(2r) \le C_2 \qquad (0 < C_1 \le C_2) \tag{11}$$

を満たすような $(0,\infty)$ 上の正値な狭義単調減少関数 g により

$$C_3 g(|x-y|) \le G(x,y) \le C_4 g(|x-y|) \qquad (0 < C_3 \le C_4) \tag{12}$$

と評価されるとする。このとき、$\mathscr{K}_\infty = \mathscr{S}_\infty$ が成立する。

(証明概略)
(11) を満たすような $g(r)$ で $G(x,y)$ が (12) のように評価されるとき、或る正数 C_0 により

$$\frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)} \le C_0(G(x,y)+G(y,z)) \tag{13}$$

が成立するから、$\mathscr{K}_\infty \subset \mathscr{S}_\infty$ が云える。特に、α-安定型過程や相対論的 α-安定型過程の場合には命題 3 で与えられている $G(x,y)$ の評価式に注意して $g(r) = r^{\alpha-d}$ ないし $g(r) = r^{\alpha-d} \vee r^{2-d}$ と定めると良い。□
不等式 (13) は 3G-定理と呼ばれ、$\mathscr{K}_\infty \subset \mathscr{S}_\infty$ を示すために用いられる常套手段である。尚、これは α-安定型過程について同じことを主張した、竹田雅好・上村稔大両氏の結果 [11] を拡張したものである。以上のことから、現在の枠組みでは [8] の定理 3.9 が次のように拡張可能である。

命題 8. 測度 $\mu \in \mathscr{K}_\infty$ に対して以下は同値である。

(i) $x \neq y$ に対して $G^\mu(x,y) := \int_0^\infty p^\mu(t,x,y)dt < \infty$:
(ii) $\inf\{\mathscr{E}(u,u) \mid u \in \mathscr{F}, \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\} > 1$:
(iii) $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x[\exp(A_\infty^\mu)] < \infty$

この命題を用いることで、まずは定理 5 の必要性が証明できる。
(定理 5 の必要性の証明)
$p^{\mu}(t,x,y)$ は $p(t,x,y)$ と同様の上下評価をもつこと、マルコフ過程の過渡性から $G(x,y)<\infty$ が成り立つため、$G^{\mu}(x,y)<\infty$ である。命題 8 より、これは

$$\inf\{\mathscr{E}(u,u) \mid u\in\mathscr{F}, \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\} > 1$$

となることに同値なので、これで示された。□

2.2 十分条件であることの証明

十分性の証明に入る前に、命題 8 にまつわる概念を 1 つ定義しておく。

定義 9. 正値連続な加法的汎関数 A_t^{μ} が命題 8 の (iii) を満たすとき、測度 μ はゲージアブルであるという。

式 (10) が成立するとき、命題 8 より測度 μ はゲージアブルなので、$h(x)=\mathbb{E}_x[\exp(A_{\infty}^{\mu})]$ と定めると、適切な正数 C_1 により

$$1\le h(x)\le C_1 \tag{14}$$

が成立する。ここで、Z.-Q. Chen、T.-S. Zhang 両氏による h-変換 ([6] 定理 3.4) を適用するためには、$\mathscr{F}$ の $\mathscr{E}$ ノルムによる閉包 $\mathscr{F}_e$ に属す u を適切に選べば $h(x)=\exp(u(x))$ が成立することを云わねばならない。そのため、以下では μ に条件

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} G(x,y)\mu(dx)\mu(dy)<\infty \tag{15}$$

を課すこととする。このとき [9] の一連の命題・定理より以下のことが云える。

命題 10. *(竹田 2006)*

(1) $\mu\in\mathscr{K}_{\infty}$ に対して $G\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^d}G(x,y)\mu(dy)$ とする。条件 *(15)* の下では、$G\mu\in\mathscr{F}_e$ となる。
(2) μ がゲージアブルのとき、以下の式が成立する。

$$h(x)=1+G(h\mu)(x) \tag{16}$$

(3) $u(x):=\log(1+G(h\mu)(x))\in\mathscr{F}_e$ が成立する。

次に関数 $G(h\mu)$ の福島分解

$$G(h\mu)(X_t)-G(h\mu)(X_0)=M_t^{[G(h\mu)]}+N_t^{[G(h\mu)]}$$

を考える。ここで、右辺の第 1 項はマルティンゲール加法的汎関数、第 2 項はエネルギー 0 の連続な加法的汎関数である。このとき、式 (16) より、$M_t^{[G(h\mu)]}=M_t^{[h]}$ であり、更に [7] の定理 5.4.1 を用いると

$$h(X_t)-h(X_0)=M_t^{[h]}-\int_0^t h(X_s)dA_s^{\mu}$$

が成立することがわかる。ここでマルティンゲール M_t を

$$M_t=\int_0^t \frac{1}{h(X_{s-})}dM_s^{[h]}$$

により定め、L_t を方程式 $L_t = 1 + \int_0^t L_{s-} dM_s$ の一意解とすると、

$$L_t = \frac{h(X_t)}{h(X_0)} \exp(A_t^\mu)$$

が得られる。この乗法的汎関数 L_t を用いて $L^2(h^2 dx)$ 上の半群 $\{P_t^{\mu,h}\}_{t\geq 0}$ が

$$P_t^{\mu,h} f(x) := \mathbb{E}_x[L_t f(X_t)] = \frac{1}{h(x)} \mathbb{E}_x[h(X_t)\exp(A_t^\mu) f(X_t)] \tag{17}$$

と定められるので、生成されるディリクレ形式も以下のように決定できる。

命題 11. *(Chen, Zhang 2002)*
半群 $\{P_t^{\mu,h}\}_{t\geq 0}$ により生成される $L^2(h^2 dx)$ 上のディリクレ形式 $(\mathscr{E}^{\mu,h}, \mathscr{D}(\mathscr{E}^{\mu,h}))$ は、以下のように表される。

$$\mathscr{E}^{\mu,h}(u,v) = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (u(y)-u(x))(v(y)-v(x)) J(x,y) h(x) h(y) dx dy, \qquad \mathscr{D}(\mathscr{E}^{\mu,h}) = \mathscr{F} \tag{18}$$

この命題を用いることで、定理 5 の十分性を示すことができる。
(定理 5 の十分性の証明)
半群 $\{P_t^{\mu,h}\}_{t\geq 0}$ は $h^2(x)dx$ に対して $h(x)^{-1} p^\mu(t,x,y) h(y)$ という積分核をもっていることが、(17) よりわかる。一方で $h(x)$ は (14) を満たしているので、$L^2(h^2 dx) = L^2(\mathbb{R}^d)$ であり、ディリクレ形式 (18) は $J_1(x,y) = J(x,y)h(x)h(y)$ を飛躍測度とするような $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のそれと見なすこともできる。更に

$$\frac{\kappa_3}{|x-y|^d \phi(|x-y|)} \leq J_1(x,y) \leq \frac{\kappa_4}{|x-y|^d \phi(|x-y|)} \qquad (0 < \kappa_3 \leq \kappa_4)$$

となる。ゆえに、$h(x) p^\mu(t,x,y) h(y)$ は $p(t,x,y)$ と同様の上下評価をもつことが、命題 1 及び命題 2 よりわかる。再び (14) に注意すると $p^\mu(t,x,y)$ も $p(t,x,y)$ と同様の上下評価をもつので、十分性が示された。□

3 今後の展望

定理 5 に登場した式、

$$\inf\{\mathscr{E}(u,u) \mid u \in \mathscr{F}, \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\} > 1$$

が成立するとき、測度 μ は劣臨界的であるという。同様にして、以下の概念が定義されている。

定義 12. (1) μ が臨界的であるとは、以下が成立することである。

$$\inf\{\mathscr{E}(u,u) \mid u \in \mathscr{F}, \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\} = 1$$

(2) μ が優臨界的であるとは、以下が成立することである。

$$\inf\{\mathscr{E}(u,u) \mid u \in \mathscr{F}, \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\} < 1$$

両者の場合で同様の問題を考えると、もはや基本解の安定性は成立しないが、具体的な $p^\mu(t,x,y)$ の振る舞いについては未だに得られていない。また、定理 5 では、元になるディリクレ形式は過渡的であるということが前提であったが、再帰的な場合にどのような結果が得られるのかを考えることは興味深い。

参考文献

[1] Albeverio, S., Blanchard, P., Ma, Z.-M.: Feynman-Kac semigroups in terms of signed smooth measures, Inter. Series of Num. Math. 102, 1-31, (1991).

[2] Albeverio, S., Ma, Z.-M.: Perturbation of Dirichlet forms -lower semiboundedness, closability, and form cores, J. Funct. Anal. 99, 332-356, (1991).

[3] Chen, Z.-Q., Song, R.-M.: General gauge and conditional gauge theorems, The Ann. of Prob. Vol. 30, 1313-1339, (2002).

[4] Chen, Z.-Q., Kumagai, T.: Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets, Stoc. Proc. Appli. 108, 27-62, (2003).

[5] Chen, Z.-Q., Kim, P., Kumagai, T.: Global heat kernel estimates for symmetric jump processes, Trans. Amer. Math. Soc. 363, 5021-5055, (2011).

[6] Chen, Z.-Q., Zhang, T.-S.: Girsanov and Feynman-Kac type transformations for symmetric Markov processes, Ann. I. H. Poincarè 38, 475-505, (2002).

[7] Fukushima, M., Oshima, Y., Takeda, M.: Dirichlet forms and symmetric Markov processes, De Gryuter Studies in Mathematics 19, second edition, (2011).

[8] Takeda, M.: Conditional gaugeability and subcriticality of generalized Schrö-dinger operators, J. Funct. Anal. 191, 343-376, (2002).

[9] Takeda, M.: Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α-stable processes, Proc. Amer. Math. Soc. 134, 2729-2738, (2006).

[10] Takeda, M.: Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger oeprators on Riemannian manifolds, Bull. London Math. Soc. 39, 85-94, (2007).

[11] Takeda, M., Uemura, T.: Subcriticality and gaugeability for symmetric α-stable processes, Forum Math. 16, 505-517, (2004)